

Cevap Anahitleri

MAT 310 CEBİR II QUIZ SORULARI

- 1) (30p) R birimli bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $ab+ba=1$ ve $a^2b+ba^2=a$ ise a 'nin çarpma işlemine göre tersi a^{-1} olmak üzere a^{-1} 'i b cinsinden bulunuz.

Gözüm: $ab+ba=1 \xrightarrow{\text{Sol taraf } a \text{ ile çarp}} a^2b+aba=a$ ve $a^2b+ba^2=a \Rightarrow a^2b+aba=a^2b+ba^2$ } 15p

$\Rightarrow aba=ba^2$
 $\xrightarrow{\text{Sol taraf } a^{-1} \text{ ile çarp}} ab=ba$

$ab+ba=1 \Rightarrow 2ba=1$
 $\xrightarrow{\text{Sol taraf } a^{-1} \text{ ile çarp}} 2b=a^{-1}$ } 15p

$a^{-1}=2b$ bulunur

- 2) (70p) $R = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subset \mathbb{Z}_{10}$ kümesi veriliyor. \mathbb{Z}_{10} halkasının toplama ve çarpma işlemlerine göre R öncelikle halka oldu gösterilmelidir.

20p a) R bir tamlik bölgesi olur mu? Araştırınız.

20p b) R bir cisim olur mu? Araştırınız.

10p c) R 'nin karakteristiği varsa bulunuz.

Gözüm: R 'nin Tamlik Bölgesi; Cisim olması için veya karakteristiğinin var olması için öncelikle halka olması gerekir.

halka $R \subseteq \mathbb{Z}_{10}$ olduğundan ve $R \neq \emptyset$ olduğundan R alt küme olarak \mathbb{Z}_{10} 'de $\forall \bar{x}, \bar{y} \in R$ için $\bar{x}-\bar{y} \in R$ dir çünkü R 'nin elemanları çift sayılar ve \mathbb{Z}_{10} da çift modül olduğundan $\bar{x}-\bar{y} \in R$ dir. İstersek tablo yaparak da bunu gösterebiliriz.

+	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$

Elemanların hepsi R 'ye düşer

Benzer şekilde \mathbb{R}^7 'nin elemanları çift tamsayı olduğundan \mathbb{Z}_{10} halkasındaki mod da çift olduğundan $\forall \bar{x}, \bar{y} \in R$ için $\bar{x} \cdot \bar{y} \in R$ dır tıme tablo yardımıyla da gösterilebilir

0	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$

$\in R$

20p

R, \mathbb{Z}_{10} 'ün bir alt halkasıdır yani R bir halkadır

(20p) a) R birimli olur mu? $\bar{6}$ olduğu görülmüştür. Çünkü $\forall \bar{x} \in R$ için $\bar{x} \cdot \bar{6} = \bar{x}$ olduğu görülmüştür.

b) \mathbb{Z}_{10} daki çarpma işlemi değişmeli olduğundan R değişmelidir.

c) R de sıfır bölen eleman yoktur. Çünkü $\bar{x} \neq \bar{0}, \bar{y} \neq \bar{0}$ için $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{0}$ olamaz. Yukarıdaki tablodan sıfırdan farklı elemanların çarpımlarının sıfır olmadığı kolayca görünür. $\bar{0}$ halde R sıfır bölen içermez.

(20p) b) R cisimdir. Çünkü $\bar{0} \neq \bar{x}$ olmak üzere $\forall \bar{x} \in R$ için \bar{x} 'nin tersi vardır.

- $\bar{2}$ 'nin tersi $\bar{8}$ ($\bar{2} \cdot \bar{8} = \bar{6}$)
- $\bar{4}$ 'nin tersi $\bar{4}$ ($\bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{6}$)
- $\bar{6}$ 'nin tersi $\bar{6}$ ($\bar{6} \cdot \bar{6} = \bar{6}$)
- $\bar{8}$ 'nin tersi $\bar{2}$ ($\bar{8} \cdot \bar{2} = \bar{6}$)

(10p) c) R halka olduğundan karakteristiki vardır ve halka birimli olduğundan birimi elemanın mertebesi halkanın karakteristiğine eşittir. $\bar{0}$ halde $n \in \mathbb{Z}^+$ yi bulalım. \mathbb{Z}_{10} daki işlemlere göre $n \cdot \bar{6} = \bar{0}$ oş en küçük $n=5$ bulunur. Çünkü $5 \cdot \bar{6} = \bar{30} = \bar{0}$, yani R 'nin karakteristiği 5 tir.

NOT: İsterseniz önce cisim olduğunu gösterip her cisim bir tamlik bölgesidir yazarak ilk sıkkı aynı anda gösterebilirsiniz. İlk sıkkı toplam 40 puan olur.